

XXIV° Congreso Nacional del Agua 2013

San Juan, 14 al 18 de Octubre de 2013

UTILIZACIÓN DE UN ENTORNO DE VIDEOJUEGO Y UN MODELO NUMÉRICO ROBUSTO PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SAINT-VENANT EN 2D

Gustavo Rubén Zavala

Administración Provincial del Agua, Ruta Nac. N°16 km 12.5, CP 3500, Resistencia, Chaco
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste, Las Heras 727, CP: 3500, Resistencia, Chaco
grzavala@gmail.com

RESUMEN

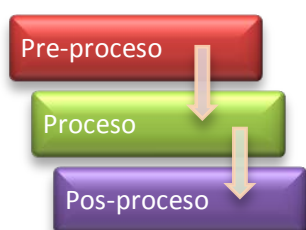
Aprovechando las tecnologías actuales disponibles provenientes de la industria de los videojuegos y aplicaciones 3D para propósito general se presenta un software de nivel alfa desarrollado con un lenguaje de programación express que permite hacer uso de la computación heterogénea GPU + CPU orientado a resolver problemas de hidráulica e hidrología. El módulo de simulación numérica utilizado es hidrodinámico, de segundo orden, robusto, bien balanceado y destinado a resolver el sistema Saint-Venant en dos dimensiones (2D) para la solución de aguas poco profundas. Permite preservar estados estacionarios como lagos en reposo, pasar de áreas secas a húmedas y viceversa, preserva el cálculo garantizando la positividad de la profundidad del fluido y puede aplicarse a problemas con fuertes cambios de pendientes en zonas cercanas a las variaciones bruscas de fondo sin que manifieste oscilaciones en la solución. Estas características dentro de un entorno gráfico con entrada alternativa a través de un gamepad infieren una herramienta de diseño amigable y didáctica. El software ha sido validado con dos problemas de test conocidos, la simulación de un flujo estacionario en un canal con regímenes subcrítico y supercrítico, los resultados numéricos obtenidos se contrastaron con los exactos. Además se incluyen tres ejemplos resueltos, modificaciones dinámicas cambiando los niveles de un vertedero y sus efectos hidráulicos, estructura de control con rápida y dissipador de energía y por último la simulación de una creciente en una planicie de inundación llana con un río de pendiente casi nula rodeada de lagunas.

Palabras Claves: Fluidodinámica, hidráulica, hidrología, simulación, videojuego, software.

INTRODUCCIÓN

Las características de robustez y preservación de la positividad de la altura de agua del modelo aritmético de solución hidrodinámica de (Kurganov A.; Petrova G. 2007) para el sistema (Saint-Venant, 1871) con un modelo de fricción, permiten afrontar soluciones reales para los problemas de aguas poco profundas (shallow water) en una dimensión (1D) y dos dimensiones (2D). Casos tales como estados estacionarios producidos en lagos en reposo, pasar de áreas húmedas a estados secos y viceversa y abordar problemas en topografías discontinuas con marcadas pendientes impide el colapso o la interrupción repentina del cálculo computacional debido a que garantiza el signo positivo de la variable profundidad del agua, evita soluciones espurias y arroja resultados sin sobresaltos de las variables del fluido. Si consideramos dos aspectos más, uno tiene que ver con el avance de la tecnología de la industria de los videojuegos, necesitando placas gráficas potentes para generar y visualizar mundos virtuales y seres interactuando en ellos con calidad hiperrealista, proceso que demanda millones de operaciones de coma flotante por segundo que incluye a la Unidad de Proceso Gráfica (GPU sigla en inglés). El otro aspecto es que existen lenguajes de programación gratuitos para desarrollar software de propósito general como CUDA de NVIDIA® y XNA de Microsoft® destinados a sacar el máximo provecho de la GPU, utilizables en computadoras hogareñas o notebook. En (Brodtkorb A, et al; 2013) se describe y justifica el alto rendimiento del uso heterogéneo GPU+CPU (Unidad de Proceso Central, sigla en inglés) aprovechando a ambos por la masividad de procesadores en paralelos del primero y la potencia de los nuevos procesadores de varios núcleos de la segunda. (Hagen T., et al; 2007) explican la manera de utilizar eficientemente la GPU para computar soluciones numéricas. Aplicaciones que dan cuenta de esto podemos encontrar en (Mei X., et al; 2007) presentaron simulaciones de erosiones provocadas por lluvias y escurrimiento de ríos, con soluciones rápidas y visualización progresiva del fenómeno. (Hao A., et al; 2010) describe un eficiente método para simulación hidráulica con modificaciones dinámicas topográficas provocadas a voluntad por el usuario. En (Brodtkorb A., et al; 2012) presentan los primeros 4.000s de la simulación de lo ocurrido con la rotura de la presa Malpasset en 27s usando 480.000 celdas cuadradas de 15m de lado. Otro es el estudio y aplicación presentado en (de la Asunción M., et al; 2012) analizaron el área de inundación por la posible rotura de la presa El Limonero ubicada en la ciudad de Málaga sobre el río Guadalmedina, abarcando un área de 3.260m de ancho por 8.000m de largo, discretizando en 1.043.000 celdas de 5m x 5m.

La arquitectura tradicional de los software de ingeniería ejecutan los módulos de pre-proceso, proceso o solución y pos-proceso (PPP) de manera secuencial Ilustración 1 a), ante una modificación de los datos en el módulo de pre-proceso se repite la secuencia hasta visualizar los resultados en el módulo de pos-proceso.



a) PPP en serie



b) interacción entre PPP

Ilustración 1

Entre módulos, el almacenando y la lectura de ficheros de datos y resultados hacen un proceso estático y lento. En este artículo se dará un enfoque distinto, alentando a la interacción entre

los módulos PPP en permanente ejecución al comenzar el cálculo Ilustración 1 b), con visualización y solución permanente, detectando los cambios en las condiciones de bordes. Es decir, mientras comienza el proceso en tiempo de ejecución pueden modificarse los niveles y velocidades del fluido, cambiar a voluntad la topografía de un canal, río o alterar zonas de la solera de una estructura hidráulica y observar el comportamiento resultante del fluido.

El artículo está organizado de la siguiente manera, en la segunda sección se hace referencia a la teoría y método utilizado incluyendo la implementación. La sección siguiente cuenta con la validación y problemas resueltos. A continuación la discusión, y en la últimas sección las conclusiones y trabajos futuros.

ESQUEMA CENTRADO HACIA ARRIBA DE SEGUNDO ORDEN BIEN BALANCEADO PRESERVANDO LA POSITIVIDAD (Kurganov-Petrova).

Sistema Saint-Venant.

En sistema de ecuaciones a derivadas parciales de (Saint-Venant, 1871) aplicable a problemas de aguas poco profundas (shallow water) es la gravedad quien induce el movimiento del fluido. Consiste en un sistema hiperbólico de leyes de conservación de la masa y la cantidad de movimiento. Se considera insignificante la aceleración vertical, la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad, existe conservación de la masa y el movimiento. Aplicable a simulaciones de escurrimientos de ríos, tsunamis, inundaciones, roturas de presas, mareas de tempestades, etc.

El modelo de aproximación 2D que gobierna el flujo libre en un canal de sección rectangular y anchura de unidad en forma diferencial compacta y en forma numérica corresponde a la Ecuación (1) y de manera vectorial a la Ecuación (2).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} = S \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x \\ -ghB_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{gn^2u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{3/2}} \\ -\frac{gn^2v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

<i>U</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>S_B</i>	<i>S_f</i>
Vector de variable conservadas	Funciones flujo ejes x	Funciones flujo ejes z	Término fuente de fondo	Término fuente de fricción

$$U_t + F(U, B)_x + G(U, B)_z = S_B(U, B) + S_f(U) \quad (2)$$

Donde U es el vector de variables conservadas, F es el vector de flujo convectivo en la dirección del eje 'x', G es el vector de flujo convectivo en la dirección del eje 'z', S es el vector de términos fuentes de la pendiente del fondo S_B y fricción S_f , h es la altura promedio del fluido coincidiendo con el eje cartesiano espacial 'y', u y v son las velocidades promedios del fluido en direcciones de los ejes 'x' e 'z' respectivamente, g la constante gravitacional, $B(x,z)$ representa la elevación de fondo, B_x y B_z representan la pendiente de fondo en sentido de los ejes 'x' y 'z', n es el coeficiente de Manning para la fricción de fondo y paredes. La altura o nivel del agua promedio se

calcula como $w = h + B$, siendo B el nivel de fondo o topográfico. Las condiciones iniciales de borde están sujetas a $h(x, z, 0) = h_0(x, z)$, $u(x, z, 0) = u_0(x, z)$.

Modelo matemático

El modelo numérico utilizado en el software es (Kurganov A.; Petrova G., 2007) es del tipo (Godunov, 1959) para resolver el sistema de leyes de conservación hiperbólica discretizado mediante diferencias y volúmenes finitos, de segundo orden, de alta resolución en un esquema numérico semi-discreto explícito centrado hacia arriba (central-upwind scheme). Es un modelo preciso sin oscilaciones cerca de las discontinuidades de fondo, bien equilibrado (well balanced) para las condiciones de flujo y los fuentes, preservando el cálculo inclusive en el estado estacionario para un lago en reposo $u = 0$, $v = 0$, $w = h + B = \text{Const.}$. Garantiza la positividad de la altura de agua (positivity preserving) $h \geq 0$ para áreas de transición húmedas y secas tales casos de orillas e islas, debido a que para el dominio computacional las alturas negativas interrumpen la simulación porque los valores propios del Jacobiano de los flujos $\mp u\sqrt{gh}$ están en función de esta variable.

Cambiando en la Ecuación 1 la altura de agua por la diferencia del nivel de agua menos el fondo $h = w - B$, la Ecuación (3) queda para cada uno de los vectores sumandos:

$$\begin{aligned} F(U, B) &= \left(hu, \frac{(hu)^2}{(w-B)} + \frac{1}{2}g(w-B)^2, \frac{(hu)(hv)}{w-B} \right)^T \\ G(U, B) &= \left(hv, \frac{(hu)(hv)}{(w-B)}, \frac{(hv)^2}{w-B} + \frac{1}{2}g(w-B)^2 \right)^T \\ S_B(U, B) &= (0, -(w-B)Bx, -(w-B)Bz)^T \\ S_f(U) &= \left(0, -\frac{gu\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}, -\frac{gv\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} \right)^T \end{aligned} \quad (3)$$

Discretización espacial

El fondo continuo $B(x, z)$ es reemplazado por una aproximación de grillas cuadradas que segmentan espacialmente el dominio 3D tal:

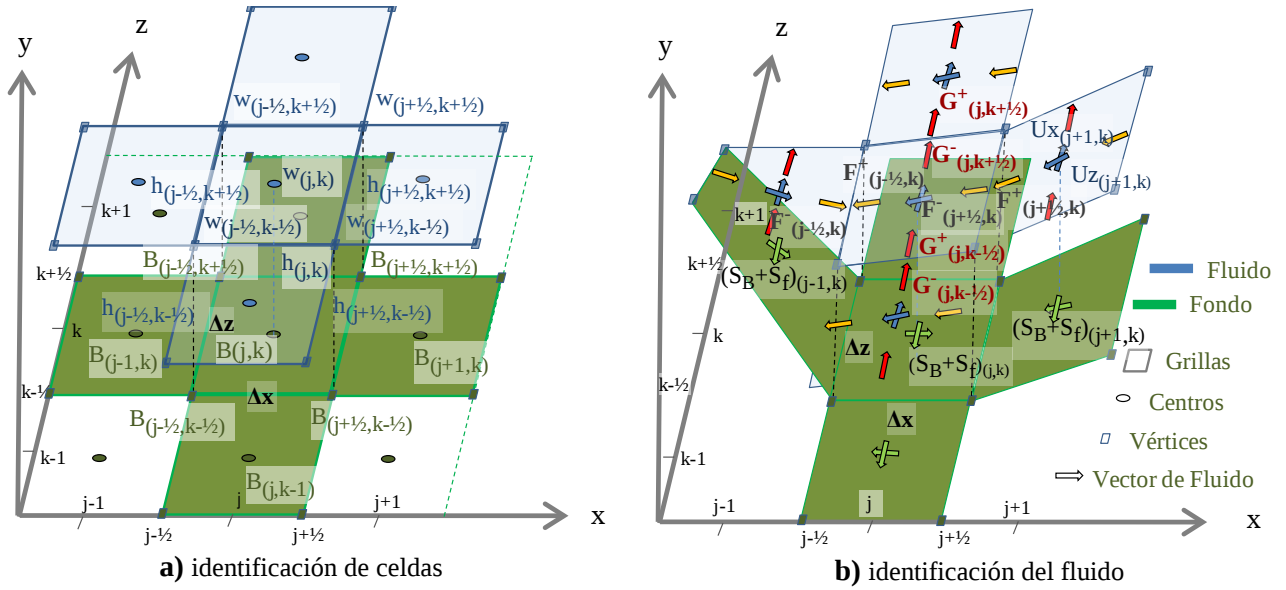
$$C_{j,k} = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}][z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}] \text{ donde } x_\alpha = \alpha \Delta x \text{ y } z_\beta = \beta \Delta z \quad (4)$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (ODE sigla en inglés) en la discretización espacial de la Ecuación (3) resulta una aproximación a la solución real de $\bar{U}_{j,k}(t)$ evolucionada a través del tiempo en la celda $C_{j,k}$.

$$\frac{d}{dt} \bar{U}_{j,k}(t) = - \frac{H_{j+\frac{1}{2},k}^x(t) - H_{j-\frac{1}{2},k}^x(t)}{\Delta x} - \frac{H_{j,k+\frac{1}{2}}^z(t) - H_{j,k-\frac{1}{2}}^z(t)}{\Delta z} + \bar{S}_{j,k}(t) \quad (5)$$

Siendo $H_{j+\frac{1}{2},k}^x$ y $H_{j,k+\frac{1}{2}}^z$ los flujos numéricos centrados hacia arriba y $\bar{S}_{j,k}$ es una discretización apropiada de los promedios de células del término fuente. La forma impuesta para la grilla de volúmenes finitos de las Ecuaciones (5), (6) y (7) representan el mallado espacial del esquema Kurganov-Petrova basado en una división reticular del dominio, donde U se indica como promedio

en cada cuadrícula, B está dado como una superficie de trozos bilineal definida por los valores en los cuatro esquinas celulares, y los flujos se calculan en el punto de integración medio entre interfaz de cada celda.



La discretización espacial puede escribirse como la Ecuación (8) y debe ser resuelta por un ODE estable con orden apropiado, eligiéndose el método Strong Stability-Preserving Runge-Kutta (SSP-RK) (Gottlieb S. et al., 2001). La notación representada por los signo + y - de los superíndices los valores del flujo en el punto medio entre dos celdas adyacentes $C_{j,k}$ y $C_{j+1,k}$ Ilustración 2 b) significan, en el eje 'x' a la izquierda (oeste) de $j+1,k$ corresponde el punto $j + 1 - \frac{1}{2}, k$ positivo y derecha de j (este) corresponde $j + \frac{1}{2}, k$ el signo negativo. En sentido 'z' para las celdas $C_{j,k}$ y $C_{j,k+1}$, abajo (sur) de $k+1$ corresponde el punto $j, k + 1 - \frac{1}{2}$ positivo y arriba (norte) de $k, k - \frac{1}{2}$ el signo negativo.

$$\frac{dU_{jk}}{dt} = S_f(U_{jk}) + S_B(U_{jk}, B) - \left[F\left(U_{j+\frac{1}{2},k}\right) - F\left(U_{j-\frac{1}{2},k}\right) \right] - \left[G\left(U_{j,k+\frac{1}{2}}\right) - G\left(U_{j,k-\frac{1}{2}}\right) \right] \quad (6)$$

Donde los términos fuente para las dos direcciones 'x' y 'z' son:

$$S_{B,j,k}^2(t) = -g\bar{h}_{j,k} \frac{B_{j+\frac{1}{2},k} - B_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x}$$

$$S_{B,j,k}^3(t) = -g\bar{h}_{j,k} \frac{B_{j,k+\frac{1}{2}} - B_{j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (7)$$

Los flujos numéricos del sistema centrado hacia arriba están dados por la Ecuación (8).

$$H_{j+\frac{1}{2},k}(t) = \frac{a_{j+\frac{1}{2},k}^+ F(U_{j+\frac{1}{2},k}^-, B_{j+\frac{1}{2},k}) - a_{j+\frac{1}{2},k}^- F(U_{j+\frac{1}{2},k}^+, B_{j+\frac{1}{2},k})}{a_{j+\frac{1}{2},k}^+ - a_{j+\frac{1}{2},k}^-} + \frac{a_{j+\frac{1}{2},k}^+ a_{j+\frac{1}{2},k}^-}{a_{j+\frac{1}{2},k}^+ - a_{j+\frac{1}{2},k}^-} \left[U_{j+\frac{1}{2},k}^+ - U_{j+\frac{1}{2},k}^- \right]$$

$$H_{j,k+\frac{1}{2}}(t) = \frac{b_{j,k+\frac{1}{2}}^+ G(U_{j,k+\frac{1}{2}}^-, B_{j,k+\frac{1}{2}}) - b_{j,k+\frac{1}{2}}^- G(U_{j,k+\frac{1}{2}}^+, B_{j,k+\frac{1}{2}})}{b_{j,k+\frac{1}{2}}^+ - b_{j,k+\frac{1}{2}}^-} + \frac{b_{j,k+\frac{1}{2}}^+ b_{j,k+\frac{1}{2}}^-}{b_{j,k+\frac{1}{2}}^+ - b_{j,k+\frac{1}{2}}^-} \left[U_{j,k+\frac{1}{2}}^+ - U_{j,k+\frac{1}{2}}^- \right] \quad (8)$$

La Ecuación (9) representa los valores de las soluciones obtenidas por la reconstrucción lineal por tramos Ecuación (10) de la celda $C_{j,k}$ en los puntos a la izquierda y derecha de $j + \frac{1}{2}, k$ respecto a 'x' y de abajo y arriba de $j, k + \frac{1}{2}$ respecto a 'z'

$$\begin{aligned} U_{j+\frac{1}{2},k}^\pm &= \begin{pmatrix} w_{j+\frac{1}{2},k}^\pm, h_{j+\frac{1}{2},k}^\pm, u_{j+\frac{1}{2},k}^\pm, h_{j+\frac{1}{2},k}^\pm, v_{j+\frac{1}{2},k}^\pm \end{pmatrix} \\ U_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm &= \begin{pmatrix} w_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm, h_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm, u_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm, h_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm, v_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{U}_{(x,z)} = \bar{U}_{j,k} + U_{(x)}(x - x_j) + U_{(z)}(z - z_k) \quad (10)$$

$$\text{para } (x, z) \in C_{j,k}, \text{ siendo } x - \frac{1}{2} < x < x + \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2} < z < z + \frac{1}{2}$$

La reconstrucción de U depende de w y u considerando que

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2},k}^\pm &= w_{j+\frac{1}{2},k}^\pm - B_{j+\frac{1}{2},k} \\ h_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm &= w_{j,k+\frac{1}{2}}^\pm - B_{j,k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

La solución del flujo numérico deja de ser de primer orden a través correcciones limitadas no lineales (Sweby, 1984), para este caso se ha utilizado en entre otros $Minmod(\theta f, c, \theta b)$ generalizado de un parámetro Ecuación (12), consiguiendo con suficiente precisión que el esquema numérico sea de segundo orden en el espacio, evitando oscilaciones espurias en la solución numérica. Las letras c , f y b representan las diferencias para las aproximaciones de las derivadas adelante, en el centro y atrás para cada eje 'x' y 'z'.

$$\begin{aligned} U_{(x)} &= Minmod\left(\theta \frac{U_{j,k} - U_{j-1,k}}{\Delta x}, \frac{U_{j+1,k} - U_{j-1,k}}{2\Delta x}, \theta \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta x}\right) \\ U_{(z)} &= Minmod\left(\theta \frac{U_{j,k} - U_{j,k-1}}{\Delta z}, \frac{U_{j,k+1} - U_{j,k-1}}{2\Delta z}, \theta \frac{U_{j,k+1} - U_{j,k}}{\Delta z}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Siendo la función definida como

$$Minmod(y_1, y_2, \dots) = \begin{cases} \min_i \{y_i\}, & \text{si } y_i > 0 \forall_i \\ \max_i \{y_i\}, & \text{si } y_i < 0 \forall_i \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$\theta \in [1,2]$ representa la viscosidad del fluido aumentando a mayor valor, para las pruebas se adoptó $\theta = 1,3$.

Con $w_{j,k} \equiv 0$ podría dar valores negativos en $h_{j,k}$ cerca de las áreas secas, por lo tanto estas alturas deben ser corregidas para preservar la positividad de los resultados en las Ecuaciones (11) a la (14). En Kurganov-Petrova, Sección 3.2 se explica con detalles este aspecto pudiendo ser capaz de preservar el "lago en reposo" y el "lago seco", estados estacionarios, así como sus combinacio-

nes. Por lo tanto el promedio de las velocidades está condicionado. La dificultad de computar áreas cercanas a las secas es que al calcular $u = hu/h$ y $v = hv/h$ puede arrojar grandes errores cuando h se acerca a cero obteniéndose grandes velocidades e inestabilidades. Además, el paso de tiempo Δt es directamente proporcional a la velocidad máxima en el dominio, afectando gravemente la solución. Para evitar las grandes velocidades se des-singularizan el cálculo de las velocidades poco profundas utilizando la Ecuación (13), teniendo un efecto de amortiguamiento en ellas.

$$\bar{u}_{j,k} = \frac{\sqrt{2} \bar{h}_{j,k} (\overline{hu})_{j,k}}{\sqrt{\bar{h}_{j,k}^4 + \max(\bar{h}_{j,k}^4, \varepsilon)}}, \quad \bar{v}_{j,k} = \frac{\sqrt{2} \bar{h}_{j,k} (\overline{hv})_{j,k}}{\sqrt{\bar{h}_{j,k}^4 + \max(\bar{h}_{j,k}^4, \varepsilon)}}, \quad (13)$$

Determinar la tolerancia prescripta ε es complicado. Si es grande produce grandes errores en los resultados, si es muy chico produce paso de tiempo muy pequeño. (Brodtkorb A., et al; 2012) sugieren para dar una proporcionalidad con el tamaño de la grilla y para casos reales adoptar $\varepsilon = \kappa \max\{1, \min\{\Delta x, \Delta z\}\}$ considerando el valor $\kappa = 10^{-2}$ para cómputos en simple precisión.

Después de evaluar h , u y v se debe computar los caudales para el dominio completo de acuerdo a la Ecuación (14).

$$(hu)_{j,k} = h_{j,k} u_{j,k}, \quad (hv)_{j,k} = h_{j,k} v_{j,k} \quad (14)$$

Finalmente, las velocidades locales $a_{j+\frac{1}{2},k}^{\pm}$ y $b_{j+\frac{1}{2},k}^{\pm}$ de la **referencia**. Ecuación (8) se obtienen usando los valores característicos del Jacobiano $\frac{\partial F}{\partial U}$ y $\frac{\partial G}{\partial U}$ de la Ecuación (15).

$$a_{j+\frac{1}{2},k}^{\pm} = \min \left\{ u_{j+\frac{1}{2},k}^{\pm} \pm \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2},k}^{\pm}}, u_{j+\frac{1}{2},k}^{\mp} \pm \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2},k}^{\mp}}, 0 \right\}$$

$$b_{j,k+\frac{1}{2}}^{\pm} = \min \left\{ v_{j,k+\frac{1}{2}}^{\pm} \pm \sqrt{gh_{j,k+\frac{1}{2}}^{\pm}}, v_{j,k+\frac{1}{2}}^{\mp} \pm \sqrt{gh_{j,k+\frac{1}{2}}^{\mp}}, 0 \right\} \quad (15)$$

Para la simplicidad de notaciones no se ha colocado la variable tiempo t para $\bar{U}_{j,k}$, $U_{j+\frac{1}{2},k}$, $U_{j,k+\frac{1}{2}}$, $a_{j+\frac{1}{2},k}^{\pm}$ y $b_{j,k+\frac{1}{2}}^{\pm}$.

Discretización temporal

El segundo orden temporal n se alcanza utilizando el método hacia adelante de Euler (forward Euler) en la Ecuación (5) y aplicando la solución de SSP-RK para cada celda del dominio. La Ecuación (16) muestra el procedimiento empleado en las etapas de tiempo discreto t .

$$U_{j,k}^* = U_{j,k}^n + \Delta t R(U_{j,k}^n)$$

$$U_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} U_{j,k}^n + \frac{1}{2} [U_{j,k}^* \Delta t R(U_{j,k}^*)] \quad (16)$$

El paso de tiempo Δt está restringido por la condición estándar CFL (Courant R., et al; 1928) tal que se cumpla la Ecuación (17).

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{4a}, \frac{\Delta z}{4b} \right\}$$

$$\text{siendo } a = \max_{j,k} \left\{ \max \left\{ a_{j+\frac{1}{2},k}^+, -a_{j+\frac{1}{2},k}^- \right\} \right\}, b = \max_{j,k} \left\{ \max \left\{ b_{j,k+\frac{1}{2}}^+, -b_{j,k+\frac{1}{2}}^- \right\} \right\} \quad (17)$$

Para tener en cuenta el efecto de corte del fondo dado por la rugosidad superficial se usó la discretización semi-implícita Ecuación (18).

$$\left. \begin{aligned} S_f(U_{j,k}^*) &\approx U_{j,k}^* \bar{S}_f(U_{j,k}^*) \\ S_f(U_{j,k}^{n+1}) &\approx U_{j,k}^{n+1} \bar{S}_f(U_{j,k}^*) \end{aligned} \right| \bar{S}_f(U_{j,k}^t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} \\ -\frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde $\bar{S}_f(U_{j,k}^t)$ es computado explícitamente para U en el paso de tiempo t . Agregando la Ecuación (18) en la (17) y reordenando obtenemos:

$$\begin{aligned} U_{j,k}^* &= \frac{U_{j,k}^n + \Delta t R(U_{j,k}^n)}{1 + \Delta t \bar{S}_f(U_{j,k}^n)} \\ U_{j,k}^{n+1} &= \frac{\frac{1}{2} U_{j,k}^n + \frac{1}{2} [U_{j,k}^* \Delta t R(U_{j,k}^*)]}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \bar{S}_f(U_{j,k}^*)} \end{aligned} \quad (19)$$

IMPLEMENTACIÓN

Para lograr la interacción entre los módulos PPP tal la Ilustración 1 b) se explicará resumidamente la

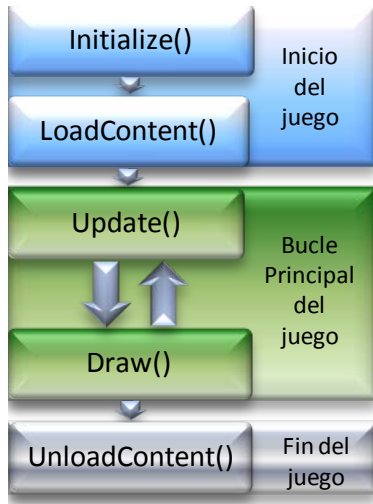


Ilustración 3

disposición de la arquitectura en bloques y funcionamiento (James S., 2010) de un videojuego en lenguaje XNA y C-# express. Para este caso el producto resultante es un software de ingeniería orientado a aplicaciones hidráulicas e hidrológicas. Los bloques son regiones para desarrollar los códigos de programación teniendo sus propias características. En el bloque Initialize() se declaran globalmente las clases, métodos y valores de las variables de iniciación del sistema. El bloque LoadContent() levanta los archivos a memoria propios del problema a resolver, siendo los nombres de las extensiones: *.ZNI contiene el nombre del problema, referencias de niveles MOP e IGM, límites máximos y mínimos, colores del fluido, colores del modelo digital del terreno (MDT), punto de vista inicial del observador, variable de velocidad desplazamiento del observador en el escenario, frecuencia de guardado automático de imágenes y de resultados, etc.; *.ZBL están los datos topográficos, es decir los datos necesarios para construir el en 3D el MDT. Dividido en una cabecera identificando el tamaño de la grilla, los valores nulos para índices, valores y niveles y un cuerpo con una arquitecta que permite disponer de una grilla de estudio irregular; *.ZBC posee las condiciones de bordes exteriores e interiores para las celda; *.ZMA los valores de los coeficientes de rugosidad; *.ZWI las condiciones iniciales de altura y velocidad del fluido en todo el espejo de agua; *.ZIM contiene el nombre de la imagen satelital que se usa como fondo en tercera capa, la escala del pixel y las coordenadas espaciales de ubicación. Ambos bloques se ejecutan por única vez y cuando arranca el programa. Finalizados estos, los bloques Update() y Draw() comienzan a ejecutarse en

paralelo indefinidamente hasta que se dé la instrucción de finalización, cerrándose el programa con `UnloadContent()`. El bloque `Update()` tiene la interface con que detecta la entrada teclado, mouse y gamepad reaccionando a las peticiones del usuario. Además se encuentran las clases, funciones y métodos de cálculo descritos en la sección precedente, almacenamiento numérico de los hidrogramas, cómputo de áreas secas y húmedas, cubicación para distintos niveles de agua, etc. En el bloque `Draw()` están las clases que dibujarán el escurrimiento superficial de agua, los escenarios 3D del MDT, la imagen de fondo y de otros elementos visuales cada uno en capas distintas. Pueden cambiarse dinámicamente los puntos de vista del observador, escalas y cortes, almacena imágenes, visualiza datos y resultados, etc.

RESULTADOS

Se ha llevado a cabo experimentos con dos problemas que poseen solución analítica conocidas utilizados como test numérico para validar la aplicación. De (MacDonald, 1994) se extrajeron los problemas N°1 y N°2 de flujo estable en canales rectangulares abiertos, Ambos problemas distintos están basados para el mismo canal que tiene un ancho de 10.0m, largo de 100.0 m, coeficiente de rugosidad de Manning 0,03 y un caudal de entrada de 20.0m³/s. La Ilustración 4 a) muestran los resultados para un estado de flujo subcrítico con profundidad inicial $h(0)=0,878\text{m}$, $y(x)$ representa el perfil teórico de la profundidad del fluido, $Calc$ es el perfil determinado por la aplicación y $B(x)$ el perfil de fondo. En b) similar al anterior pero corresponde al resultado para la condición de flujo supercrítico, profundidad inicial $h(0)=0,809\text{m}$ y $w(x)$ es el nivel del fluido resultante.

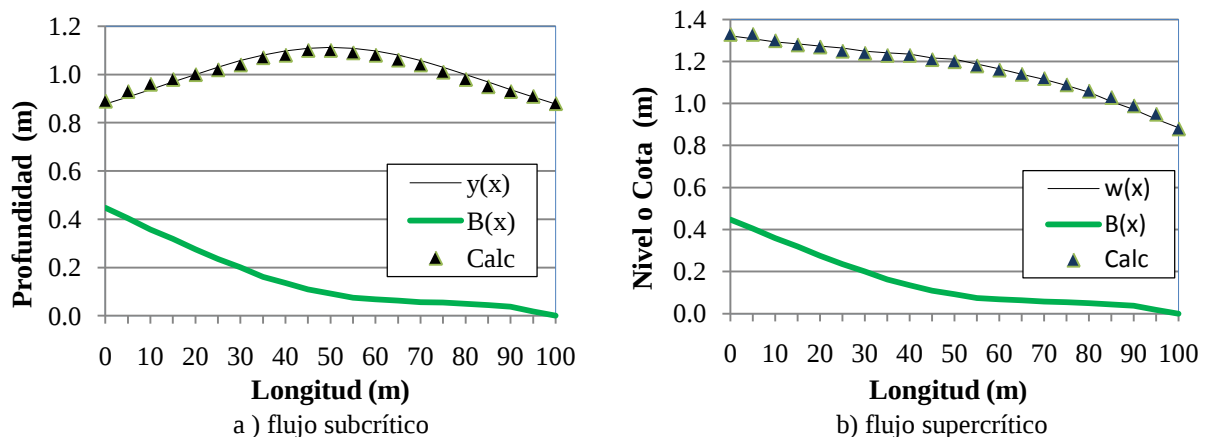


Ilustración 4

Los tres problemas siguientes inferirían las características del software y su potencial futuro, el primero trata de la modificación dinámica del fondo de un vertedero a través del gamepad. El recorrido por el dominio geométrico puede hacerse gracias a una interfaz de uso gráfico que utiliza un puntero comandado por un gamepad, sector por donde se apunte se obtienen y visualizan las características topográficas e hidráulicas, ambos pueden modificarse a través de los botones y palancas. La Ilustración 5 a) muestra a través de imágenes secuenciales los resultados el método descrito, las distintas modificaciones realizadas del fondo en la zona del dissipador de energía así también los cambios de los niveles del perfil hidráulico. La Ilustración 5 b) en perspectiva y vista frontal muestra la estructura 3D de una rápida, cuenco amortiguador seguido de unos bloques de impacto espaciados, formada por celdas de 1m x 1m, de 10m de ancho y caudal de entrada constante igual a 15m³/s. El corte longitudinal denota el perfil hidráulico con las profundidades correspondientes.

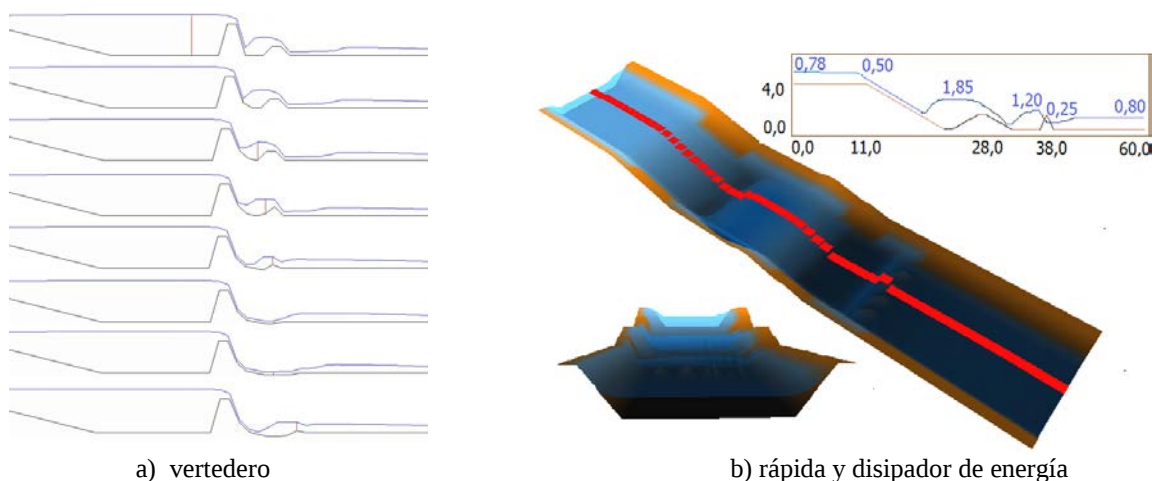


Ilustración 5

Puede verse la simulación en internet a través de <http://youtu.be/VoSgnKTrdpo>

El último experimento trata de una planicie de inundación llana Ilustración 6 a) y b) de 588.92Ha aproximadamente un tercio del área total de la Cuenca Recinto de la ciudad de Resistencia, Chaco, sub-cuenca del Río Negro (SUPCE-AFIN, 1998) a). El MDT se construyó con 14.724 celdas de 20m x 20m de contorno irregular acompañando caminos y defensas laterales b). Está basado en la nivelación de (HYTSA, 2000) e (INCONAS.S.A, 2.001) modificadas a través de imágenes históricas Google 24/11/2.009 (período húmedo) y 19/10/2.010 (período seco) geocorregidas con el GIS del Catastro de la Municipalidad de la Ciudad de Resistencia 2.011.

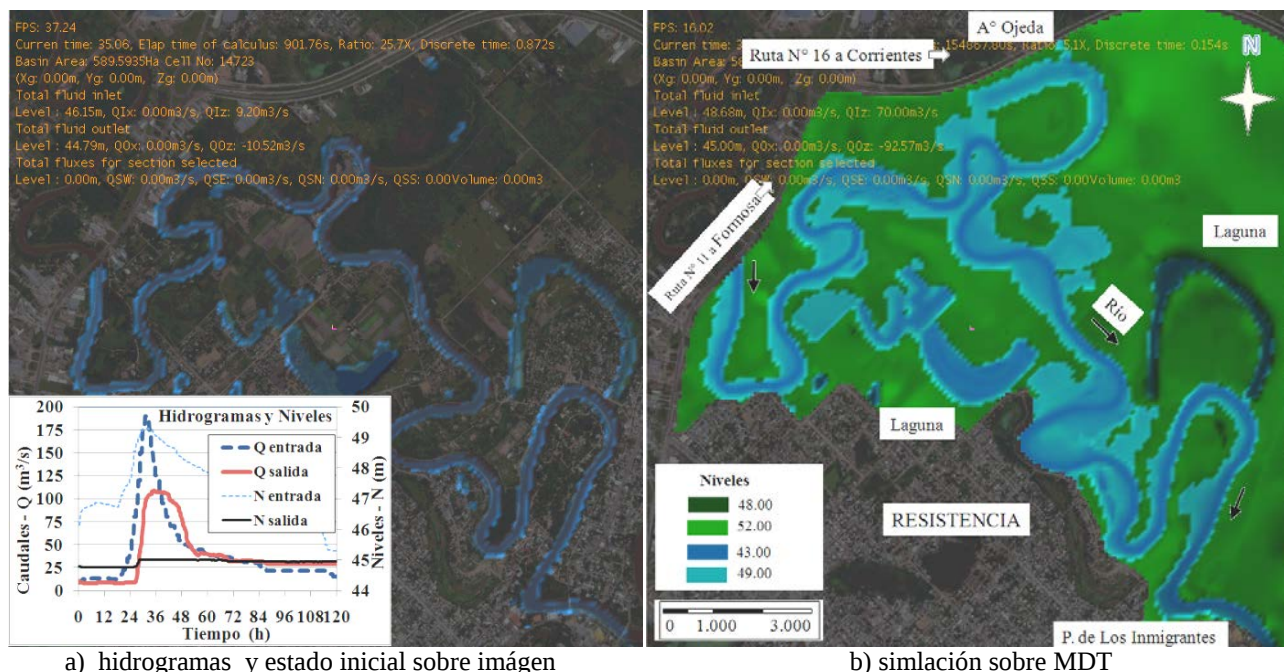


Ilustración 6

Se analizó un hidrograma de entrada con un caudal pico de 190m³/s aplicado en el puente de la Ruta 11, período de análisis de 5 días, paso de tiempo $\Delta t = 1$ hora. Entrada y salida nula en el A° Ojeda y control de salida en zona del puente de Los Inmigrantes. Con el nivel del río a cota 45.00 se computó un volumen inicial de 0.3853hm³ incluyendo a las lagunas. En la Tabla 1 Balance de Volúmenes Almacenados, se observan para períodos de 12 hs comparaciones de cómputo entre los

volúmenes almacenados calculados por la diferencia entre los hidrogramas de entrada y salida y el volumen almacenado por el MDT.

Tiempo (h)	Volumenes de hidrogramas (m ³)				Vol. MDT (m ³)	Errores	
	Entrada	Salida	Almacenado	Tot. Almac		(m ³)	(%)
0	volumenes	en el río y	lagunas →	370 222			
12	491 914	350 064	141 850	512 072	494 863	17 209	3.36
24	1 206 148	698 149	507 999	878 221	787 232	90 989	10.36
36	6 861 293	3 390 703	3 470 590	3 840 812	3 403 561	437 251	11.38
48	10 495 040	7 438 266	3 056 774	3 426 996	2 994 845	432 151	12.61
60	11 846 750	9 237 928	2 608 822	2 979 044	2 470 248	508 796	17.08
72	12 904 000	10 557 950	2 346 050	2 716 272	2 196 616	519 656	19.13
84	13 590 090	11 350 420	2 239 670	2 609 892	2 044 723	565 169	21.65
96	13 760 790	11 554 940	2 205 850	2 576 072	1 714 094	861 978	33.46
108	14 978 390	12 739 230	2 239 160	2 609 382	1 691 366	918 016	33.60
120	15 408 250	13 320 550	2 087 700	2 457 922	1 673 458	784 464	31.92

Tabla 1 Balance de volúmenes almacenados

El cómputo completo incluyendo cálculos hidráulicos y procesamiento de imágenes en tiempo de ejecución a > 30 FPS fue 5 veces más rápido respecto al problema estudiado, necesitan 24 horas para resolver el problema en una computadora Notebook Intel Core I3 de 4 Gb de memoria RAM y placa gráfica básica. La secuencia de imágenes de los niveles del río debido al tránsito del hidrograma puede observarse en internet mediante el link <http://youtu.be/LNENRWIUShc>.

DISCUSIÓN

Los dos test de validación del software tuvieron muy buena aproximación a la solución teórica utilizando variables de precisión simple. La aplicación real en el último ejemplo relacionado a la planicie de inundación tiene resultados aceptables teniendo en cuenta que se realizaron diecisiete tanteos en búsqueda de los coeficientes de fricción de Manning. Debería completarse la cuenca en su totalidad y realizar una calibración automática de parámetros para optimizar la solución.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se presentó un software de propósito hidráulico utilizando un modelo de solución numérica con características de ser un esquema de alta resolución, bien balanceado, estable y preservador de la positividad para resolver problemas de aguas someras o poco profundas. Desarrollado en una plataforma de videojuegos con la que se conseguiría velocidad de cómputo y visualización en tiempo de ejecución.

La computación heterogénea migró a las computadoras de escritorios y portátiles para ser aprovechada con propósito general, considerar la velocidad de cómputo como performance de esta tecnología sería alternativa válida cuando en estos momentos se estaría imposibilitado superar la velocidad y frecuencia de las actuales CPU. Los modelos de simulaciones numéricos hidráulicos e hidrológicos tendrían elevada capacidad de cálculo y alta calidad en la representación espacial de los fenómenos físicos con poco código escrito. Las características del software resultante podrían ser compactas, potentes y de bajo costo. La posibilidad mediante los botones y palancas a través del gamepad de modificar las condiciones de bordes iniciales en tiempo de ejecución (primer ejemplo), lo harían atractivo y cómodo para el diseño, debido a que pueden monitorearse inmediatamente los resultados tras los cambios. Sería una característica del tipo didáctica y de ayuda al diseño porque al

interactuar dinámicamente con el problema probando cambios alternativos de manera visual, el usuario iniciado podría adquirir rápida experiencia a través de los resultados inmediatos. Por otro lado según el tipo de problema, los resultados de simulación tendrían soluciones antes que se desarrollaran los fenómenos físicos reales, tal el caso del último ejemplo, por tal motivo sería válida la consideración de ser utilizado para procesos de control y prevención de crecientes. La utilización de grillas agrupadas de forma periférica irregular reduce los requisitos de memoria ahorrando tiempo de cómputo.

El ser un modelo discreto hidrodinámico alienta incluirle un módulo de pérdidas adecuado que contemple lo necesario para transformarlo en modelo hidrológico distribuido, de igual manera módulos de contaminación y sedimentos, etc.

(Bollermann A., et al; 2013) modificaron el punto de encuentro intermedio del segmento entre la línea seca del fondo y húmeda del fluido para el sistema 1D, estos cambios serán aplicados para el entorno 2D.

BIBLIOGRAFÍA

- Brodtkorb A.; Hagen T.; Sætra M.** (2013). "Graphics processing unit (GPU) programming strategies and trends in GPU computing". *Computers & Fluids* 73 (1), 4-13.
- Bollermann A.; Chen G.; Kurganov A.; Noelle S.** (2013). "A Well-Balanced Reconstruction of Wet/Dry Fronts for the Shallow Water Equations". *Journal of Scientific Computing*, Springer US , 1-24.
- Brodtkorb A.; Sætra M.; Altinakar S.** (2012). Efficient shallow water simulations on GPUs: Implementation, visualization, verification, and validation. *Computers & Fluids* , 55, 1-12.
- Courant R.; Friedrichs K.; Lewy H.** (1928). "On the Partial Difference Equations of Mathematical" *Physics*. 32-74.
- de la Asunción M.; Castro M.; Fernández-Nieto E.; Mantas J.; Ortega Acosta S.; González-Vida J.** (2012). "Efficient GPU implementation of a two waves TVD-WAF method for the two-dimensional one layer shallow water system on structured meshes". *Computers & Fluids*, Elsevier
- Godunov, G.** (1959). "A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics". *jour Mat. Sb. (N.S.)* 47, 271-306.
- Gottlieb S.; Shu C.W.; Tadmor E.** (2001). "High Order Time Discretization Method with the Strong Stability Preserving Property". *Society for Industrial and Applied Mathematics* , 43 (1), 89-112.
- Hagen T.; Henriksen M.; Hjelmervik J.; Lie K.** (2007). "How to Solve Systems of Conservation Laws Numerically Using the Graphics Processor as a High-Performance Computational Engine". (S. B. Heidelberg, Ed.) 211-264.
- Hao A., Zhu S., Li S.** (2010). Hydraulic flow simulation on dynamical changing terrain. (DOI 10.1109/ICCIS.2010.61) , 297-300.
- HYTSA.** (2000). "Plan Director de Cloacas del Area Metropolitana del gran Resistencia."
- INCONAS S.A.** (2001). "Proyecto de la Obra de Control del Río Negro en Barranqueras, Programa de Protección contra Inundaciones", 4117-AR-BIRF. Administración Provincial del Agua (APA), Subunidad Provincial para la Coordinación de la Emergencia (SUPCE).
- James, S.** (2010). "3D Graphics with XNA Game Studio 4.0." Published by Packt Publishing Ltd. 32 Lincoln Road, Olton, Birmingham, 27 6PA, UK.ISBN 978-1-849690-04-1.
- Kurganov A. y Petrova G.** (2007). "A SECOND-ORDER WELL-BALANCED POSITIVITY PRESERVING CENTRAL-UPWIND SCHEME FOR THE SAINT-VENANT SYSTEM". *COMMUN. MATH. SCI.* 5 (1), 133-160.
- MacDonald, I.** (1994). "Test problems with analytic solutions for steady open channel flow". Numerical Analysis Report, Departament of Mathematics University of Reading, UK6
- Mei X.; Decaudin P.; Hu B.G.** (2007). "Fast Hydraulic Erosion Simulation and Visualization on GPU". 15th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications 47-56.
- Saint-Venant, A. J.** (1871). "Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des vagues dans leur lit". *C. R. Acad. Sci. Paris*, 73, 147-154.
- Shu C. W.** (1988). "Total-variation-diminishing time discretizations". *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing* 9 (6), 1073-1084.
- SUPCE-AFIN.** (1998). "Plan de Manejo Pluvial para la Cuenca Inferior del Río Negro dentro del Area Metropolitana del Gran Resistencia." Sub Unidad Provincial de Coordinación para la Emergencia (SUPCE)-Asociación de Apoyo a la Facultad de Ingeniería de la UNNE (AFIN).